

软土路基沉降实时建模动态预测

肖武权, 冷伍明

(中南大学 土木建筑学院, 长沙 410075)

摘 要: 在路基填筑施工过程中, 用多项式与时间序列 AR 组合模型预测其沉降变形发展。根据沉降观测值, 采用统计分析方法识别和建立多项式预测模型, 预测在某时期沉降趋势值; 用平稳时间序列分析方法建立随机部分模型, 并预测沉降随机部分值, 二者之和即为某时期沉降预测值。随着新观测数据的不断加入, 及时修改预测模型参数值, 达到实时预测之目的。工程实例研究表明: 组合模型预测值明显优于单一趋势模型预测值。组合模型一步预测误差绝对值大多数情况下小于 5 mm。预测步数越多, 预测误差则越大。

关 键 词: 沉降; 动态预测; 多项式与 AR 组合模型

中图分类号: TU 433; O 212

文献标识码: A

Real-time modeling and dynamic predicting of settlement of soft soil roadbeds

XIAO Wu-quan, LENG Wu-ming

(School of Civil and Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: During the filling construction of the soft soil roadbed, the total settlement value could be predicted by using polynomial and time-series combined model. On the basis of measured settlement data, the polynomial prediction model could be discriminated and established by statistics; and the settlement trend value at a certain future time would be predicted. The random settlement could be gotten by random prediction model that is established by smooth and stable time series analysis method. The sum of above two prediction values is the settlement prediction value of the roadbed at some certain time. With the addition of new settlement data, the model parameters are continuously modified. The practical settlement prediction of the soft soil roadbed shows that the combined model is superior to the single polynomial model; and the absolute error value between measure and one-step prediction value is mostly below 5 cm. The more prediction step is, the greater error is.

Key words: settlement; dynamic prediction; polynomial and time series combined model

1 引 言

软土路基沉降包括趋势和随机部分, 前者反映了沉降内在规律性; 后者反映了随机因素的影响, 如施工因素、地面荷载不规则变化和量测误差等。沉降预测方法很多, 但大多采用单一模型预测趋势值, 而忽略随机值, 如灰色模型、人工神经网络、双曲线法、反演法预测等^[1~4]。本文采用趋势与随机沉降预测相结合的方法, 根据观测值用统计分析方法识别和建立趋势部分函数模型, 预报在将来某时刻的趋势值。用平稳时间序列分析方法建立随机部分模型并预测其发展, 二者叠加即为沉降预测值。

2 趋势部分的预测

趋势预测预报模型有很多, 如直线型、指数型、对数型、幂指数型、双曲线型、多项式型和灰色模型。经过对已观测数据 $\{S(t)\}$ 的反复拟合, 选择最优拟合模型为多项式。最佳多项式拟合模型不但要求误差平方和尽量小且要求符合沉降不断增加的发展趋势, 要避免预测数据与实测数据背离较大, 特别是预测沉降逐渐减少等异常情况^[5]。笔者认为, 用 Excel 2000 图表中添加趋势线功能几分钟就能选择合适的多项式。具体操作是: 输入观测数据后, 利用图表向导绘制实测曲线图→按鼠标右键选择添加趋势线→在趋势线上按右键选择趋势线格式→在 3

个选项(图案、类型、选项)中,类型选择多项式(阶数 2~6 次),选项中趋势预测选择前推 2 个单位(可从图上直观地看出曲线变化趋势和拟合情况),并选择显示公式和 R^2 值。从趋势预测图上剔除拟合精度高而趋势异常的多项式,选择与最近观测值拟合最好的多项式。

根据所选拟合多项式,用 Mathcad 2001 编制简单程序进行趋势项计算与输出和随机项时间序列模型的建立与预测。

提取沉降趋势值 $\{\hat{S}_1(t)\}$ 后,就可建立随机项时间序列 $\{x_t\}$ 。

$$\{x_t\} = \{S(t)\} - \{\hat{S}_1(t)\} \quad (1)$$

3 随机部分的预测

综上所述,随机部分沉降时间序列 $\{x_t\}$ 是观测值 $\{S(t)\}$ 与趋势值 $\{\hat{S}_1(t)\}$ 之差。时间序列的建模就是建立数据序列的过去值和未来值之间的联系。对于一个平稳随机过程,可以建立如下的差分方程。

$$\begin{aligned} x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \\ a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_m a_{t-m} \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)称为 ARMA 模型。但任何一个 ARMA 模型都可由一个高阶的 AR 模型替代,因此,本文采用 AR 模型,其数学表达式如下:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} - \cdots + \phi_p x_{t-p} + a_t \quad (3)$$

式中 $\phi_1 \sim \phi_p$ 为 AR(p)模型的自回归系数; a_t 为模型残差,假定服从正态分布,即 $a_t \sim NID(0, \sigma_a^2)$ 。随机部分预测的步骤如下。

(1) 数据的预处理与检验

建立 AR 模型的时间序列数据要求是平稳序列。因此,需要对数据进行平稳性、零均值和正态检验^[6],如不满足,则要进行平稳化、零均值处理。剔出了趋势值后的随机部分沉降值,一般具有平稳、大致零均值和正态分布特征。

(2) 模型阶数的确定与模型参数的估计

模型阶数的确定主要有 F 检验定阶法、FPE、AIC 和 BIC 准则等。

模型参数确定方法有很多,最常用的是最小二乘估计法^[7]。采用最小二乘法计算得到模型参数,预测下一步发展趋势。其方法如下:

对于式(3),令 $t=p+1, p+2, \cdots, N$, 根据最小二乘原理即可得到 AR(p)模型参数的估计为

$$\phi_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N \quad (4)$$

$$\text{式中 } \phi_N = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p]^T \quad (5)$$

$$Y_N = [x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_N]^T \quad (6)$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{N-p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{t=p+1}^N (x_t - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i})^2 \quad (8)$$

(3) 沉降值随机项预报

利用 $N(N \geq p+1)$ 个有限观测值和 p 个模型参数可直接给出序列 $\{x_t\}$ 第 1 步的预测值 $\hat{x}_t(l)$ 表达式:

$$\hat{x}_t(l) = \sum_{j=1}^p \phi_j x_{t+l-j} \quad (9)$$

因此,软土路基沉降预测等于趋势部分与随机部分二者之和, $t+1$ 时沉降预测值 $\hat{S}(t+1)$ 如下:

$$\hat{S}(t+1) = \hat{S}_1(t+1) + \hat{x}_t(l) \quad (10)$$

当获得新的沉降信息时,重新计算模型参数和下一步预测,如此不断递推,预测沉降发展趋势。

根据以上分析,笔者用 Mathcad 2001 编制了计算程序,很容易计算趋势项与随机项模型参数并计算出预测值。

4 应用实例

上(海)—瑞(丽)高速公路湖南境内(湘)潭—邵(阳)段分布有内陆湖盆型与河漫滩型软土,建筑在软土地基上的路堤高度不一,从 3~10 m 不等。为确保路基施工安全、施工质量和研究沉降变化规律,对路堤沉降进行了施工监测。下面以 k101+105 中桩 14 期(以 10 d 为一期,即观测时间为 140 d)沉降观测序列为例说明动态实时预测方法。

原始沉降观测时间序列(单位为 mm):

$$\{S(14)\} = (3, 7.25, 11.5, 14.75, 34.5, 42, 63, 70, 83, 95.5, 105, 110, 114.7, 123)$$

用 Excel 2000 分别拟合 2~6 次多项式,如表 1。从拟合多项式模型相关系数平方 R^2 值大小,可知多项式以 6 次最高;但 3, 6 次多项式预测值异常;2, 5 次内插值相差太大且预测值变化较大,因此选择阶数和拟合程度较高的 4 阶多项式:

$$\hat{S}_1(t) = 0.0091t^4 - 0.3707t^3 + 4.8341t^2 - 12.136t + 12.202 \quad (11)$$

式(11)即为趋势项预测模型。

表1 趋势项预测模型对比表
Table 1 Comparison of settlement trend prediction model

多项式预测模型	R^2	内插值/mm		预测值/mm		
		$\hat{S}_1(13)$	$\hat{S}_1(14)$	1步	2步	3步
$\hat{S}_1(t) = -0.0645t^2 + 11.286t - 17.315$	0.9816	118.5	128.0	137.5	146.8	156.0
$\hat{S}_1(t) = -0.0979t^3 + 2.1389t^2 - 2.3947t + 2.6629$	0.9952	117.9	119.7	117.6	111.0	99.1
$\hat{S}_1(t) = 0.0091t^4 - 0.3707t^3 + 4.8341t^2 - 12.136t + 12.202$	0.9966	116.9	122.2	127.4	133.5	141.7
$\hat{S}_1(t) = 0.0014t^5 - 0.0443t^4 + 0.356t^3 + 0.5062t^2 - 1.4668t + 4.3124$	0.9969	107.8	111.0	118.1	133.3	162.5
$\hat{S}_1(t) = -0.0002t^6 + 0.0083t^5 - 0.1639t^4 + 1.3573t^3 - 3.6393t^2 + 6.2107t - 0.3129$	0.9970	-117.4	-240.6	-417.9	-666.7	-1010.1

按式(11)得内插趋势项序列:

$$\hat{S}(t) = \hat{S}_1(t) + \hat{x}_t \quad (15)$$

$$\{\hat{S}_1(t)\} = (4.5, 4.4, 10.0, 19.6, 31.7, 45.1, 58.8, 72.0, 84.0, 94.6, 103.5, 110.8, 116.9, 122.2)$$

(12)

1~3步预测15~17期(即150, 160, 170d)时的沉降趋势值: $\hat{S}_1(15) = 127.4 \text{ mm}$; $\hat{S}_1(16) = 133.5 \text{ mm}$; $\hat{S}_1(17) = 141.7 \text{ mm}$ 。

按式(1)得到随机部分时间序列 $\{x_t\}$:

$$\{x_t\} = (1.54, -2.80, -1.47, 4.86, -2.78, 3.14, -4.18, 1.97, 1.01, -0.95, -1.54, 0.81, 2.17, -0.83)$$

(13)

对该时间序列进行平稳性、零均值和正态分布检验合格后,按BIC准则建立了AR(5)预测模型:

$$x_t = -0.391x_{t-1} - 0.264x_{t-2} - 0.251x_{t-3} + 0.36x_{t-4} + 0.47x_{t-5} \quad (14)$$

按式(14)预测(经还原后)得15~17期沉降随机部分预测值为 $\hat{x}_{15} = 1.786$; $\hat{x}_{16} = 0.582$; $\hat{x}_{17} = 1.012$ 。

将趋势部分与随机部分预测值叠加得预测时间为15~17期的沉降值如下:

则 $\hat{S}(15) = 129.2 \text{ mm}$; $\hat{S}(16) = 134.1 \text{ mm}$; $\hat{S}(17) = 142.7 \text{ mm}$ 。

当获得新的沉降观测值 $S(15) = 130 \text{ mm}$,按上述方法与步骤建立新的预测模型如下:

$$\hat{S}_1(t+1) = 0.0104t^4 - 0.4079t^3 + 5.1711t^2 - 13.244t + 13.19 \quad (16)$$

$$\hat{x}_t = -0.051x_{t-1} + 0.032x_{t-2} - 0.11x_{t-3} + 0.342x_{t-4} + 0.294x_{t-5} \quad (17)$$

由此得到在16~18期的沉降预测值如下:

$$\hat{S}(16) = 136.61 \text{ mm}; \hat{S}(17) = 147.49 \text{ mm}; \hat{S}(18) = 163.41 \text{ mm}。$$

依此类推,每获得一个新的沉降数据,重新建立模型,预测一步或多步未来值。每一次新数据的加入用Excel 2000和自编程序能在0.5 h内完成全部计算并输出结果。

表2列出了部分预测值与实测值的比较情况,组合模型一步预测值与实测值曲线如图1所示。

表2 k101+105观测桩沉降部分预测值与实测值比较
Tab.2 Prediction and observed settlement values of observed pile k101+105

预测式	步骤	参数	预测时间/10 d										
			10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
多项式预测	一步	预测值/mm	90.6	102.6	106.9	129.8	133	127.4	135.9	146.7	162.6	163	170.0
		误差/mm	-4.9	-2.4	-3.1	15.1	10	-2.6	-1.8	-2.6	6.6	0	2
		误差率/%	-5.13	-2.29	-2.82	13.16	8.13	-2.0	-1.3	-1.74	4.23	0	1.19
	二步	预测值/mm	88.9	93.9	106.9	107	143.4	144.4	133.5	147.1	162.4	184.9	169.8
		误差/mm	-6.6	-11.1	-3.1	-7.7	20.4	14.4	-4.2	-2.2	6.4	21.9	1.8
		误差率/%	-6.91	-10.6	-2.8	-6.7	16.6	11.01	-3.1	-1.47	4.1	13.4	1.07
	三步	预测值/mm	100.4	91	91.7	107	121.2	157.3	161.9	141.7	163.1	184.8	216
		误差/mm	4.9	-14	-18.3	-7.7	-1.8	27.3	24.2	-7.6	7.1	21.4	48
		误差率/%	5.13	-13.3	-16.6	-6.7	-1.46	21	17.6	-5.1	4.55	13.1	28.6
多项式+AR(p) 预测	一步	预测值/mm	91.75	103.3	107.6	120.9	125.8	129.2	136.6	147.3	160.2	163	169.3
		误差/mm	-3.75	-1.7	-2.4	6.2	2.8	-0.8	-1.1	-2	4.2	0	1.3
		误差率/%	-3.93	-1.62	-2.18	5.4	2.28	-0.6	-0.8	-1.33	2.7	0	0.77
	二步	预测值/mm	87.8	93.7	107.4	108.4	131.4	135.9	134.1	147.5	160.1	181.4	170.7
		误差/mm	-7.7	-11.3	-2.6	-5.9	8.4	5.9	-3.6	-1.8	4.1	18.4	2.7
		误差率/%	-8.1	-10.8	-2.36	-5.14	6.8	4.5	-2.61	-1.2	2.7	11.3	1.6
	三步	预测值/mm	100.8	93.1	93.7	108.1	121.8	152.2	152.6	142.7	163.4	180.4	214.7
		误差/mm	5.3	-11.9	-16.3	-6.6	-1.2	22.2	14.9	-6.6	7.4	17.4	46.7
		误差率/%	5.5	-11.3	-14.8	-5.8	-0.98	17.1	10.8	-4.4	4.7	10.7	27.8
		实测值/mm	95.5	105	110	114.7	123	130	137.7	149.3	156	163	168

注: 误差值=预测值-实测值; 误差率=(预测值-实测值)×100%/实测值

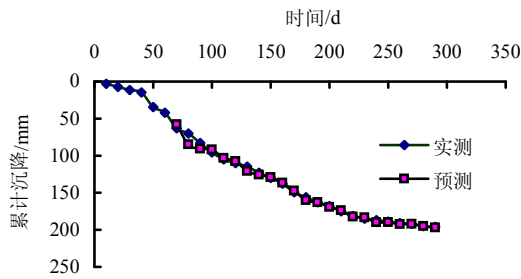


图1 累计沉降实测与一步预测值比较(k101+105 中桩)
Fig.1 One step prediction and observed total settlement values curve of observed pile k101+105

从表2和图1可总结出出下几点:

(1) 多项式与 AR (p) 组合模型一步预测曲线与实测曲线吻合较好, 误差绝对值一般小于 5 mm。

(2) 组合模型预测误差要小于单独的多项式模型预测。

(3) 预测步数越大, 预测误差也越大。如组合模型一步预测误差绝对值一般在 5 mm 以下, 二步预测误差绝对值 3~8 mm 为主, 而三步预测误差绝对值一般为 8~15 mm。因此, 预测步数较大时, 其预测值的使用要谨慎。

5 结 论

(1) 软土路基沉降值是一个动态的相互依存的变量, 用多项式模型预测趋势部分, 用时间序列 AR 模型分析预测其随机部分, 二者的叠加能较好预测沉降值。

(2) 多项式-时序组合模型具有建模思路清晰、模型简单、计算工作量不大、所需样本资料序列不长等优点, 有较高的预测精度和较好的外推预测性能, 能克服单一模型的局限性。

(3) 模型外推精度随步数增加而降低。随着新沉降变形数据的增加及时修正预测模型参数, 以达到适时预测预报之目的。

参 考 文 献

- [1] 罗鑫, 王桂尧. 高路堤沉降分析的灰色预测[J]. 长沙交通学院学报, 2002, 12(4): 72—76.
LUO Xin, WANG Gui-yao. Grey prediction for settlement analysis of high embankment[J]. *Journal of Changsha Communication University*, 2002, 12(4): 72—76.
- [2] 叶观宝, 司明强, 赵建忠, 等. 高速公路沉降预测新方法[J]. 同济大学学报, 2003, 31(5): 540—543.
YE Guan-bao, SI Ming-qiang, ZHAO Jian-zhong, et al. New prediction method on final settlement in express highway[J]. *Journal of Tongji University*, 2003, 31(5): 540—543.
- [3] 张慧梅, 李云鹏, 毛成. 人工神经网络在软土路基沉降预测中的应用[J]. 长安大学学报, 2002, 22(4): 20—22.
ZHANG Hui-mei, LI Yun-peng, MAO Cheng. Settlement prediction of roadbed in soft ground by using artificial neural network[J]. *Journal of Chang'an University*, 2002, 22(4): 20—22.
- [4] 谭昌明, 徐日庆, 周建, 等. 软粘土路基沉降的一维固结反演与预测[J]. 中国公路学报, 2002, 15(4): 14—16.
TAN Chang-ming, XU Ri-qing, ZHOU Jian, et al. Settlement back-analysis and prediction for soft clay ground of embankment[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2002, 15(4): 14—16.
- [5] 潘国荣, 王穗辉, 刘大杰. 预测地铁施工中地表变形的动态系统方法[J]. 同济大学学报, 2001, 29(3): 294—298.
PAN Guo-rong, WANG Sui-hui, LIU Da-jie. Dynamic model and forecasting of ground deformation in subway construction[J]. *Journal of Tongji University*, 2001, 29(3): 294—298.
- [6] 吴侃, 靳建明, 王卷乐. 开采沉陷时序预测技术[J]. 测绘工程, 2001, 10(4): 20—23.
WU Kan, JIN Jian-ming, WANG Juan-le. The technique of time series prediction on mining subsidence[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2001, 10(4): 20—23.
- [7] 钟正雄, 杨林德, 杨金松. 基坑变形的实时建模预报时序分析方法[J]. 工业建筑, 2000, 30(3): 1—3.
ZHONG Zheng-xiong, YANG Lin-de, YANG Jin-song. Method of time series analysis of real time modeling prediction of deep excavation deformation[J]. *Industrial Construction*, 2000, 30(3): 1—3.